

На правах рукописи



МЕЗЕНЦЕВ АЛЕКСЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗА  
В ВАКУУМ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ МАССОВЫХ СИЛ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2013

Работа выполнена на кафедре высшей и прикладной математики  
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
Дерябин Сергей Львович

Официальные оппоненты: Скоркин Николай Андреевич,  
доктор технических наук, профессор,  
Национальный исследовательский  
ядерный университет (МИФИ),  
Снежинский физико-технический институт,  
профессор кафедры высшей математики

Татосов Алексей Викторович,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный  
университет», заведующий кафедрой  
математического моделирования

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Институт вычислительных  
технологий Сибирского отделения  
Российской академии наук (ИВТ СО РАН),  
Новосибирск

Защита диссертации состоится «15» ноября 2013 г. в 14-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет» по адресу 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в информационно-библиотечном центре ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет».

Автореферат разослан «12» октября 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Оленников Евгений  
Александрович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена применению математического моделирования и численных методов для описания истечения газа в вакуум. Исследуются одномерные и многомерные течения, возникающие при истечении в вакуум нормального и политропного газа. В частности, рассматривается эволюция примыкающих к вакууму течений газа, которые испытывают воздействие массовых сил или самогравитируют по Ньютону. Также рассмотрены многомерные течения политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса.

Исследование поддержано РФФИ, проекты 08-01-00052 и 11-01-00198.

### Актуальность темы

Решение важных теоретических и прикладных задач механики сплошных сред практически невозможно без математического моделирования. Перечислим некоторые из задач газовой динамики и астрофизики, основные элементы решений которых строятся с помощью предложенного в диссертации подхода:

- исследование различных закрученных течений, границы которых являются свободными (кумулятивные струи, движение торнадо и тропических циклонов);
- описание процесса разлета газового шара, а также его схлопывания под действием самогравитации — одна из фундаментальных задач астрофизики.

### *Работы предшественников*

Математическому описанию движения сплошной среды, в той или иной мере связанному с истечением газа в вакуум, посвящен ряд работ следующих исследователей:

Риман Б., Овсянников Л.В.<sup>1</sup>, Бабич В.М., Людвиг Д., Курант Р.<sup>2</sup>, Дородницын А.А.<sup>3</sup>, Сидоров А.Ф.<sup>4</sup>, Житников Ю.В., Каждан Я.М.<sup>5</sup>, Баутин С.П.<sup>6</sup>, Дерябин С.Л.<sup>7</sup>, Тешуков В.М.<sup>8</sup>,

<sup>1</sup>Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

<sup>2</sup>Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

<sup>3</sup>Дородницын А.А. Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Сборник теоретических работ по аэродинамике. – М.: Оборонгиз, 1957. – С.77-88.

<sup>4</sup>Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

<sup>5</sup>Житников Ю.В., Каждан Я. М. Асимптотика движения газа при его истечении в цилиндрическую полость // Прикладная механика и техническая физика, 1981. – № 6. – С. 28-38.

<sup>6</sup>Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 2009. – 364 с.

<sup>7</sup>Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум – Новосибирск: Наука, 2005. – 390 с.

<sup>8</sup>Тешуков В.М. Задача Гурса для уравнений плоских потенциальных течений // Докла-

Сучков В.А.<sup>9</sup>, Рубина Л.И.<sup>10</sup>

### **Цель диссертационной работы**

1. Математическое моделирование одномерных течений нормального газа в условиях самогравитации, трехмерных течений политропного газа, в условиях действия массовых сил как общего вида, так и конкретных: тяготения и Кориолиса.

2. Численное построение движения трехмерной свободной границы газ-вакуум и исследование закономерностей построенных решений.

### **Задачи исследования**

1. Аналитическое моделирование одномерных течений нормального газа в условиях самогравитации и трехмерных течений политропного газа, в условиях действия массовых сил как общего вида, так и конкретных: тяготения и Кориолиса.

2. Построение приближенных решений системы уравнений газовой динамики, описывающих трехмерные течения политропного газа, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса.

3. Разработка программного пакета, позволяющего определять закон движения границы газ-вакуум.

4. Проведение расчетов с целью моделирования закрученных цилиндрических и конических течений, примыкающих к вакууму.

**Объект исследования** — течения идеального газа, примыкающие к вакууму.

**Предмет исследования** — методы моделирования течений идеального газа, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил самогравитации, тяжести и Кориолиса.

### **Методы исследования**

Для формализации и решения поставленных задач использовались современные методы аналитического и численного моделирования. В процессе исследования используется адекватная математическая модель — система уравнений газовой динамики, являющаяся квазилинейной системой уравнений с частными производными. Для этой модели ставятся конкретные начально-краевые задачи, для которых устанавливаются факты существования и единственности решения. Приближенные решения этих задач строятся с использованием аналитических и численных методов при определении значений начальных коэффициентов сходящихся рядов. Для построения этих коэффициентов АН СССР, 1975. — Т. 223, №2. — С. 303-306.

<sup>9</sup>Сучков В.А. Истечение в вакуум на косо́й стенке // Прикладная математика и механика. — 1963. — Т. 27, вып. 4. — С. 739-740.

<sup>10</sup>Рубина Л.И. Приближенный метод расчета одной задачи об истечении в вакуум с помощью характеристических рядов // Методы решения краевых задач механики сплошной среды: тр. ИММ УНЦ АН СССР. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1978. — С. 47-51.

ентов, в частности, применяются известные эффективные вычислительные алгоритмы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Научная новизна** результатов работы по трем областям специальности 05.13.18 сводится к следующим положениям.

#### *Математическое моделирование*

Впервые построены:

1. Одномерное течение нормального газа, примыкающего к вакууму в условиях самогравитации.
2. Трехмерные течения политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия массовых сил общего вида.
3. Трехмерные течения политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса.

#### *Численные методы*

Движение границы газ-вакуум исследовалось несколькими численными методами. Были вычислены траектории одного восходящего закрученного потока, что позволило сделать содержательные выводы о движении течения в целом. Впервые проведены расчеты трехмерных нестационарных течений с помощью конечных начальных отрезков сходящих рядов, результаты которых сравнивались с ранее найденным точным решением. Впервые для построения движения границы газ-вакуум и выявления особенностей численно исследовались специальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

#### *Комплексы программ*

Создан программный пакет, ориентированный на численное решение рассматриваемых задач с использованием результатов аналитического моделирования. Результатом одной части этого комплекса является численное построение точного цилиндрического течения, используемое для тестирования дальнейших численных методик. Другая часть комплекса определяет численные значения коэффициентов рядов для конических течений и границы применимости этого приближенного решения. Третья часть комплекса с помощью численного решения объединенной системы дифференциальных уравнений, описывающей как движение границы газ-вакуум, так и поведение выводящих производных, определяет закон движения границы газ-вакуум и моменты времени, когда в течении возникают бесконечные градиенты. С помощью созданного программного пакета проведены массовые расчеты движения границы газ-вакуум. Программный пакет прошел государственную регистрацию.

#### **Теоретическая значимость**

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

В диссертации в виде сходящихся рядов решены начально-краевые задачи со свободной границей, описывающие ранее не исследовавшиеся одномерные течения нормального газа в условиях самогравитации и трехмерные течения политропного газа в условиях действия массовых сил общего вида.

Доказана локальная сходимость рядов, описывающих эти течения. Численно исследована область применимости построенных решений для больших моментов времени. Представленная в диссертации численная методика восстановления закона движения свободной границы позволила получить количественные и качественные характеристики исследуемых течений газа.

**Практическая ценность работы** определяется ее важностью с точки зрения приложений. Построенные решения могут использоваться для следующих целей:

1. Описание процесса разлета газового шара, а также его схлопывания под действием самогравитации.

2. Исследование эффектов кумуляции при схлопывании полости в сплошной среде. Именно такие течения возникают в некоторых физических экспериментах при получении больших локальных значений плотности специальных сред, в том числе для инициирования термоядерного синтеза. Кроме того, подобные течения возникают при кавитации воздушных пузырьков на гребных винтах и подводных крыльях.

3. Исследование различных струй, включая кумулятивные, границы которых априори являются свободными.

4. Конструктивное построение трехмерных течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия массовых сил общего вида. С помощью этих течений возможно также моделирование закрученных газовых потоков, возникающих под действием сил тяготения и Кориолиса.

5. Численное и аналитическое построение законов движения свободных поверхностей, присутствующих в восходящих закрученных потоках.

Кроме того, полученные в диссертации результаты можно использовать для правильной постановки начально-краевых задач и граничных условий в численных исследованиях задач со свободными границами.

В частности, граничные условия на свободной поверхности  $\Gamma_0$  ранее применялись для численного моделирования кумулятивных струй<sup>11</sup>, а также при моделировании цунами в классической модели мелкой воды при выходе волны на берег<sup>12</sup>.

---

<sup>11</sup>Бушман А.В., Красюк И.К., Крюков Б.П., Ландин А.А., Минин В.Ф., Пашинин П.П., Семенов А.Ю., Терновой В.Я., Фортов В.Е. О численном моделировании газодинамических явлений в конических мишенях. – М.: Институт высоких температур Академии наук СССР, 1989. – 48 с.

<sup>12</sup>Баутин С.П., Дерябин С.Л., Хакимзянов Г.С., Соммер А.Ф. Исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза // Вычислительные тех-

И наконец, построенные решения могут использоваться для тестирования численных методик.

**Достоверность** результатов обеспечивается использованием адекватной природным явлениям математической модели — системы уравнений газовой динамики — применением классических математических методов для построения решений и исследованием их свойств:

- 1) доказательство существования и единственности решений рассматриваемых начально-краевых задач;
- 2) конструктивное построение решений в виде сходящихся рядов, использование начальных отрезков этих рядов для построения приближенных решений;
- 3) использование надежных численных методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность результатов численного моделирования подтверждается успешным тестированием численных методик с помощью найденного точного решения.

**На защиту выносятся результаты**, соответствующие пунктам паспорта специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

*Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.*

1. Для трехмерной системы уравнений газовой динамики обосновано существование и единственность решения нескольких начально-краевых задач, описывающих истечение идеального газа в вакуум. На основании этих решений получены новые математические модели в виде нелинейных систем уравнений с частными производными. Первая описывает движение свободной границы газ-вакуум, вторая (система транспортных уравнений) — поведение производных от параметров газа, выводящих со свободной поверхности. Закон движения границы газ-вакуум получен в виде сходящегося ряда. Начальный отрезок ряда может быть использован для приближенного моделирования движения внутренних стенок торнадо.

*Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.*

2. Разработан вычислительный метод решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующий сложные течения газа. Метод состоит из следующих составных частей:

- постановка начально-краевых задач;
- построение решения этих задач в виде сходящихся рядов;

- получение для коэффициентов рядов дифференциальных задач меньшей размерности;
- построение решений этих задач надежными численными методами.

Эффективность предложенного вычислительного метода тестируется с помощью точных частных решений исходной задачи.

*Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.*

3. Численными методами приближенно построены конические и цилиндрические течения идеального газа, примыкающие к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса.

4. Численно исследована система транспортных уравнений, что, в частности, позволило определить моменты времени, когда возникают особенности у течений на границе газ-вакуум.

### **Апробация**

Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Молодежная науч.-практ. конференция «Молодые ученые — транспорту» (Екатеринбург, УрГУПС, 2007, 2009).
2. Всероссийская конференция «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 90-летию академика Л. В. Овсянникова (Новосибирск, 2009).
3. XIII Всероссийская конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» (Абрау-Дюрсо, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, ЮФУ, 2009).
4. XVIII Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов (Пермь, ПГТУ, 2009).
5. Международная науч.-практ. конференция «Снежинск и наука-2009. Современные технологии атомной отрасли» (Снежинск, 2009).
6. Международная конференция «X Забабахинские научные чтения» (Снежинск, РФЯЦ-ВНИИТФ, 2010).
7. Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2011).

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 13 печатных работ, из них 6 в соавторстве, в том числе работы [1–4] в изданиях по перечню ВАК. В работах [12, 13] приведены подробные доказательства теорем, опубликованных в работе [3].

В совместных с Дерябиным С.Л. работах [1–3, 5, 7] — Дерябину С.Л. принадлежат постановки задач, выбор метода исследования и проверка полученных результатов. Мезенцеву А.В. принадлежат построение формальных решений, доказательство лемм и теорем существования и единственности,



также все проведенные расчеты. В работе [4] Мезенцеву А.В. принадлежат результаты моделирования природных восходящих закрученных потоков, замыкающих к вакууму.

Также опубликованы 7 тезисов в трудах различных конференций.

### **Объем и структура и работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Текст диссертации содержит 128 страниц, 70 рисунков, 37 таблиц. Список литературы включает 98 наименований.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Во **введении** обосновывается актуальность выбора темы диссертации, описаны объект и предмет исследования, определены цели и задачи исследования. Сформулированы основные результаты, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

**Первая глава** диссертации состоит из трех параграфов.

В **параграфе 1** рассматривается одномерное истечение нормального газа в вакуум в условиях самогравитации. В начале параграфа исследуются уравнения состояния нормального газа с различными особенностями и среди них выбирается уравнение состояния, наиболее точно описывающее физический процесс.

Далее решается **задача о распаде специального разрыва**, где уравнение состояния, определяющее термодинамическую природу газа, берется в виде

$$p = \rho^\gamma f(\rho, S), \quad \gamma = \text{const} > 1,$$

где  $p$  — давление,  $f(\rho, S)$  — аналитическая функция в некоторой области  $\{0 \leq \rho \leq \rho^*, S_* < S < S^*\}$ .

В задаче предполагается, что в момент времени  $t = 0$  сфера или цилиндр  $\Gamma$  радиуса  $R > 0$  отделяет нормальный, гравитирующий по Ньютону газ от вакуума.

Одномерные течения рассматриваемого газа описываются системой <sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \rho_t + \rho_x u + \rho(u_x + \nu \frac{u}{x}) &= 0, \\ u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x &= F(x, t), \\ S_t + u S_x &= 0, \\ F_x &= -\frac{\nu}{x} F - 2\nu\pi\rho G, \\ F_t &= 2\nu\pi\rho G u, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$F(x, t) = -2\nu\pi \frac{G}{x^\nu} \int_a^x r^\nu \rho(r, t) dr, \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

В момент  $t = 0$  начинается движение газа, определяемое заданными распределениями  $u_0$ ,  $S_0$ ,  $\rho_0$ , которое в дальнейшем называется фоновым течением.

Кроме этого, в момент  $t = 0$  поверхность  $\Gamma$  мгновенно разрушается, и начинается истечение газа в вакуум. Возмущения, возникшие в фоновом течении в результате мгновенного разрушения поверхности  $\Gamma$ , распространяются по газу в виде волны разрежения, отделенной от фонового течения границей  $\Gamma_1$  — поверхностью слабого разрыва. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму:  $\rho(x, t)|_{\Gamma_0} = 0$ , где  $\Gamma_0$  — свободная поверхность, отделяющая волну разрежения от вакуума. Требуется построить фоновое течение, волну разрежения, а также найти законы движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$ .

Для построения фонового течения для системы (1.1) формулируется задача Коши с начальными данными при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0(x), \quad S|_{t=0} = S_0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \\ F|_{t=0} &= F_0(x) = -2\nu\pi \frac{G}{x^\nu} \int_{a_0}^x r^\nu \rho_0(r) dr. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Решение задачи (1.1)–(1.2) в дальнейшем называется фоновым течением:

$$\rho = \rho_\Phi(x, t), \quad u = u_\Phi(x, t), \quad S = S_\Phi(x, t), \quad F = F_\Phi(x, t).$$

Зная фоновое течение, по стандартной методике получается уравнение звуковой характеристики  $x = x_1(t)$ . Подставляя  $x = x_1(t)$  в газодинамические параметры фонового течения, получаются условия на характеристике  $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} \rho|_{\Gamma_1} &= \rho_\Phi(x_1(t), t) = \rho^1(t), & u|_{\Gamma_1} &= u_\Phi(x_1(t), t) = u^1(t), \\ S|_{\Gamma_1} &= S_\Phi(x_1(t), t) = S^1(t), & F|_{\Gamma_1} &= F_\Phi(x_1(t), t) = F^1(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для построения волны разрежения в системе (1.1) делается замена переменных: за независимые переменные берутся  $t$ ,  $\rho$ , а за неизвестные функции —  $x$ ,  $u$ ,  $S$ ,  $F$ . В результате этой замены получается система:

$$\begin{aligned} x_t &= u + \rho(u_\rho + \nu x_\rho \frac{u}{x}), \\ x_\rho u_t - \rho u_\rho^2 - \nu \rho x_\rho \frac{u}{x} u_\rho + \rho^{\gamma-2} h^2(\rho, S) + f_S \rho^{\gamma-1} S_\rho &= x_\rho F, \\ x_\rho S_t - \rho(u_\rho + \nu x_\rho \frac{u}{x}) S_\rho &= 0, \\ F_t &= -\nu \frac{x_t}{x} F + 2\nu\pi G \rho(u - x_t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $h(\rho, S) = \sqrt{\gamma f(\rho, S) + \rho f_\rho(\rho, S)}$ .

Для описания начального разрыва задается одно дополнительное условие вертикали

$$x(0, \rho) = R. \quad (1.5)$$

Решение строится в виде ряда по степеням  $t$

$$\mathbf{f}(t, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \\ S_k \\ F_k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(\rho) \frac{t^k}{k!}. \quad (1.6)$$

Коэффициенты  $\mathbf{f}_k(\rho)$  ряда (1.6) находятся из систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теорема 1.** При  $0 \leq t \leq t^*$  область сходимости рядов (1.6), а также рядов  $\mathbf{f}_t$ ,  $\rho \mathbf{f}_\rho$ , покрывает всю зону течения от  $\Gamma_1$  до  $\Gamma_0$  включительно. При этом закон движения свободной поверхности при разлете газа определяется из решения вспомогательной задачи:

$$\begin{aligned} x_t^0 &= U^0, & x^0(0) &= R, \\ U_t^0 &= F^0, & U^0(0) &= u_*, \\ F_t^0 &= -\frac{\nu}{x^0} U^0 F^0, & F^0(0) &= F_0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $u_*$ ,  $F_0$  берутся из нулевых коэффициентов ряда (1.6). При схлопывании одномерной полости свободная поверхность движется с постоянной скоростью  $u_*$ .

Также в параграфе 1 исследуется задача о непрерывном примыкании газа к вакууму.

В параграфе 2 рассматриваются трехмерные течения идеального политропного газа в предположении, что на газ действует массовая сила общего вида, зависящая от времени, трех пространственных переменных, неизвестных функций: скорости газа, плотности газа, энтропии. Решается задача о распаде специального разрыва.

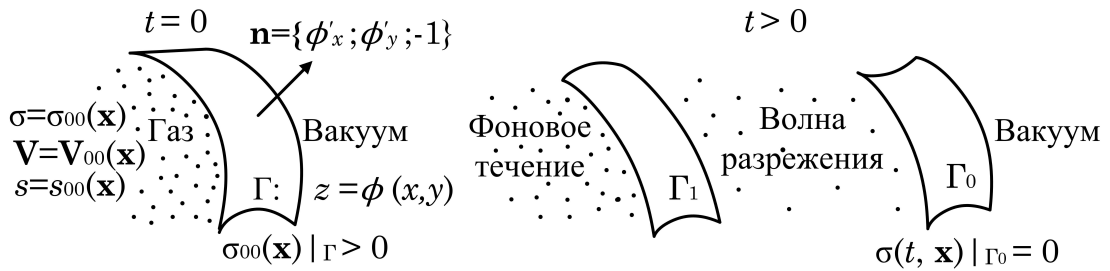


Рис. 1

Рассматривается система уравнений, описывающая неизэнтропические течения идеального политропного газа в условиях действия массовой силы <sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_t + \sigma_x u + \sigma_y v + \sigma_z w + \frac{\gamma-1}{2} \sigma (u_x + v_y + w_z) &= 0, \\ \mathbf{V}_t + \mathbf{V}_x u + \mathbf{V}_y v + \mathbf{V}_z w + \frac{2}{\gamma-1} s^2 \sigma \operatorname{grad} \sigma + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s \operatorname{grad} s &= \\ = \mathbf{f}(t, x, y, z, \mathbf{V}, s, \sigma), \\ s_t + s_x u + s_y v + s_z w &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\sigma = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ .

Начальные данные при  $t = 0$  для системы (2.1) имеют вид

$$\sigma(0, \mathbf{x}) = \sigma_{00}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{V}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_{00}(\mathbf{x}), \quad s(0, \mathbf{x}) = s_{00}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Повторяя рассуждения параграфа 1, получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \sigma|_{\Gamma_1} &= \sigma_\Phi(t, x, y, z)|_{z=z_1(t, x, y)}, \\ \mathbf{V}|_{\Gamma_1} &= \mathbf{V}_\Phi(t, x, y, z)|_{z=z_1(t, x, y)}, \\ s|_{\Gamma_1} &= s_\Phi(t, x, y, z)|_{z=z_1(t, x, y)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} z_t &= w - z_x u - z_y v + \frac{\gamma-1}{2} \sigma [(u_x + v_y) z_\sigma + w_\sigma - z_x u_\sigma - z_y v_\sigma], \\ z_\sigma [\mathbf{V}_t + \mathbf{V}_x u + \mathbf{V}_y v] + [w - z_x u - z_y v - z_t] \mathbf{V}_\sigma - \\ &- \frac{2}{\gamma-1} s^2 \sigma \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\gamma} s s_\sigma \sigma^2 \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\gamma} s \sigma^2 z_\sigma \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= z_\sigma \mathbf{f}(t, x, y, z, \mathbf{V}, s, \sigma), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} z_\sigma [s_t + s_x u + s_y v] + [w - z_x u - z_y v - z_t] s_\sigma &= 0, \\ z(0, \sigma, x, y) &= \phi(x, y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение этой задачи строится в виде ряда.

$$\mathbf{g}(t, \sigma, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}_k(\sigma, x, y) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{g} = \{z, u, v, w, s\}. \quad (2.6)$$

**Теорема 2.** Для  $1 < \gamma < 3$  при  $0 \leq t \leq t_1$  область сходимости рядов (2.6), а также рядов, задающих  $\mathbf{g}_t$ ,  $\mathbf{g}_\sigma$ ,  $\mathbf{g}_x$ ,  $\mathbf{g}_y$ , покрывает всю область течения от  $\Gamma_1$  до  $\Gamma_0$  включительно. При этом закон движения свободной поверхности определяется из решения задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t + \mathbf{V}_x U + \mathbf{V}_y V &= \mathbf{f}(t, x, y, z, \mathbf{V}, s, \sigma)|_{\sigma=0}, \\ s_t + s_x U + s_y V &= 0, \\ z_t + z_x U + z_y V &= W, \quad \mathbf{V} = \{U, V, W\}, \\ \mathbf{V}(0, x, y) &= \mathbf{V}_*(x, y), \quad s(0, x, y) = s_{00}(x, y), \quad z(0, x, y) = \phi(x, y). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В параграфе 3 решается задача о непрерывном примыкании газа к вакууму. Задача исследуется при условии, что плотность газа, следовательно, и функция  $\sigma$  во все моменты времени равна нулю на  $\Gamma_0$  — свободной поверхности газ-вакуум:  $\sigma(t, \mathbf{x})|_{\Gamma_0} = 0$ . Закон движения поверхности  $\Gamma_0$  ( $\Gamma_0|_{t=t_0} = \Gamma$ ) заранее неизвестен и определяется в ходе решения задачи.

В системе (2.1) вводится новая независимая переменная  $\eta = z - z_0(t, x, y)$ , где  $z = z_0(t, x, y)$  — неизвестный закон движения свободной поверхности  $\Gamma_0$ .

$$\begin{aligned} \sigma_t + \sigma_x u + \sigma_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) \sigma_\eta + \\ + \frac{\gamma-1}{2} \sigma (u_x + v_y + w_\eta - z_{0x} u_\eta - z_{0y} v_\eta) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}_t + \mathbf{V}_x u + \mathbf{V}_y v + (\mathbf{w} - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)\mathbf{V}_\eta + \frac{2}{\gamma-1}s^2\sigma \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{2}{\gamma-1}s^2\sigma\sigma_\eta\mathbf{n} + \frac{2}{\gamma}\sigma^2s \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\gamma}\sigma^2ss_\eta\mathbf{n} = \mathbf{f}(t, x, y, \eta + z_0, \mathbf{V}, s, \sigma), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$s_t + s_x u + s_y v + (\mathbf{w} - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)s_\eta = 0,$$

где  $\mathbf{n} = \{z_{0x}, z_{0y}, -1\}$ .

Начальные условия для системы (3.1) при  $t = t_0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma(t_0, x, y, \eta) &= \sigma_{00}(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ \mathbf{V}(t_0, x, y, \eta) &= \mathbf{V}_{00}(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ s(t_0, x, y, \eta) &= s_{00}(x, y, \eta + \phi(x, y)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условие на свободной поверхности  $\Gamma_0$ , то есть при  $\eta = 0$ , имеет вид:

$$\sigma(t, x, y, \eta)|_{\eta=0} = 0. \quad (3.3)$$

Решение задачи (3.1), (3.2), (3.3) строится в виде ряда по степеням  $\eta$ :

$$\mathbf{q}(t, x, y, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{q}_k(t, x, y) \frac{\eta^k}{k!}, \quad \mathbf{q} = \{\sigma, u, v, \mathbf{w}, s\}. \quad (3.4)$$

**Теорема 3.** *Существует  $t_* > t_0$  такое, что при  $t_0 \leq t \leq t_*$  в некоторой окрестности  $\Gamma_0$  существует единственное локально-аналитическое решение задачи (3.1), (3.2), (3.3).*

**Вторая глава** диссертации состоит из двух параграфов.

В **параграфе 4** решается задача о распаде специального разрыва.

Течения идеального политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса, строятся в относительной цилиндрической системе координат. Соответствующая ей декартовая система координат имеет оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , направленные соответственно на восток, север и вверх от поверхности. Полагается, что точка  $O$  – начало декартовой системы координат – лежит на поверхности Земли в северном полушарии на параллели с широтой  $\psi$  (рис. 2).

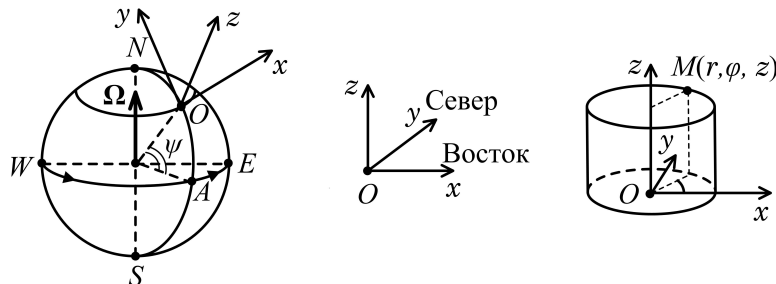


Рис. 2

Тогда в относительной декартовой системе координат постоянный вектор  $\Omega$  – вектор угловой скорости Земли имеет следующий вид:

$$\Omega = (0, \Omega_2, \Omega_3); \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi, \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

где  $\Omega$  – модуль вектора  $\Omega$ .

Рассматривается постановка задачи о распаде специального разрыва такая же, как и в параграфе 2. Требуется построить фоновое течение, волну разрежения, а также найти законы движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$ .

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального политропного газа в условиях действия сил тяготения и Кориолиса, в цилиндрической системе координат имеет вид <sup>13</sup>

$$\begin{aligned} c_t + c_r u + \frac{1}{r} c_\varphi v + c_z w + \frac{\gamma-1}{2} c \left[ u_r + \frac{1}{r} (u + v_\varphi) + w_z \right] &= 0, \\ u_t + u_r u + \frac{1}{r} u_\varphi v + u_z w - \frac{1}{r} v^2 + \frac{2}{\gamma-1} c c_r &= 2\Omega_3 v - (2\Omega_2 \cos \varphi) w, \\ v_t + v_r u + \frac{1}{r} v_\varphi v + v_z w + \frac{1}{r} u v + \frac{2}{(\gamma-1)r} c c_\varphi &= -2\Omega_3 u + (2\Omega_2 \sin \varphi) w, \\ w_t + w_r u + \frac{1}{r} w_\varphi v + w_z w + \frac{2}{\gamma-1} c c_z &= (2\Omega_2 \cos \varphi) u - (2\Omega_2 \sin \varphi) v - g. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Также, как и в параграфе 2, ставится начально-краевая задача, решение которой ищется в виде ряда

$$\mathbf{g}(t, c, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}_k(c, \varphi, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{g} = \{r, u, v, w\}. \quad (4.2)$$

**Теорема 4.** Для  $1 < \gamma < 3$  при  $0 \leq t \leq t_1 < t_0$  область сходимости ряда (4.2), а также рядов, задающих  $\mathbf{g}_t$ ,  $\mathbf{g}_c$ ,  $\mathbf{g}_\varphi$ ,  $\mathbf{g}_z$ , покрывает всю область течения от  $\Gamma_1$  до  $\Gamma_0$  включительно. При этом закон движения свободной поверхности определяется из решения задачи:

$$\begin{aligned} r_t + \frac{1}{r} r_\varphi v + r_z w &= u, \\ u_t + \frac{1}{r} u_\varphi v + u_z w &= \frac{v^2}{r} + 2\Omega_3 v - (2\Omega_2 \cos \varphi) w, \\ v_t + \frac{1}{r} v_\varphi v + v_z w &= -\frac{uv}{r} - 2\Omega_3 u + (2\Omega_2 \sin \varphi) w, \\ w_t + \frac{1}{r} w_\varphi v + w_z w &= (2\Omega_2 \cos \varphi) u - (2\Omega_2 \sin \varphi) v - g, \\ r(0, \varphi, z) &= f(\varphi, z), \quad u(0, \varphi, z) = u_*(\varphi, z), \\ v(0, \varphi, z) &= v_*(\varphi, z), \quad w(0, \varphi, z) = w_*(\varphi, z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В параграфе 5 решается задача о непрерывном примыкании газа к вакууму. В задаче предполагается, что в момент времени  $t = t_0$  трехмерная поверхность  $\Gamma$  с уравнением  $z = \phi(x, y)$  отделяет идеальный политропный газ от вакуума.

В отличие от задачи о распаде специального разрыва предполагается, что в начальный момент времени  $t = t_0 > 0$  газ непрерывно примыкает к вакууму:  $c(t_0, x, y, z)|_\Gamma = 0$ .

<sup>13</sup>Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск: Наука, 2008. – 92 с.

Поскольку теоремы, полученные в параграфе 3, справедливы и в этом случае, то главной задачей этого параграфа является исследование закона движения свободной поверхности  $\Gamma_0$ . Получено, что закон движения  $\Gamma_0$  описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} z_t + z_x u + z_y v &= w, \\ u_t + u_x u + u_y v &= 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w, \\ v_t + v_x u + v_y v &= -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v &= 2\Omega_2 u - g. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Решение системы (5.1) имеет вид.

$$\begin{aligned} u &= C_1 \cos(2\Omega\tau) + C_2 \sin(2\Omega\tau) + \frac{\cos\psi}{2\Omega} g, \\ v &= -C_1 \sin\psi \sin(2\Omega\tau) + C_2 \sin\psi \cos(2\Omega\tau) - \frac{\sin 2\psi}{2} g\tau + C_3 \cos\psi, \\ w &= C_1 \cos\psi \sin(2\Omega\tau) - C_2 \cos\psi \cos(2\Omega\tau) - (g \sin^2\psi)\tau + C_3 \sin\psi, \\ x &= \frac{C_1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{C_2}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \frac{\cos\psi}{2\Omega} g\tau + C_4, \\ y &= \frac{C_1 \sin\psi}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \frac{C_2 \sin\psi}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\sin 2\psi}{4} g\tau^2 + (C_3 \cos\psi)\tau + C_5, \\ z &= -\frac{C_1 \cos\psi}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) - \frac{C_2 \cos\psi}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\sin^2\psi}{2} g\tau^2 + (C_3 \sin\psi)\tau + C_6. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  — произвольные постоянные, появившиеся в результате интегрирования, определяются из начальных условий

$$\mathbf{x}|_{t=t_0} = \mathbf{x}_{00}, \quad \mathbf{V}|_{t=t_0} = \mathbf{V}_{00}. \quad (5.3)$$

**Третья глава** диссертации состоит из трех параграфов.

В **параграфе 6** проведены расчеты закона движения свободной поверхности  $\Gamma_0$  по полученным в параграфе 5 формулам (5.2). В работе<sup>13</sup> при моделировании течения газа в вертикальной части торнадо использовано цилиндрически симметричное течение, примыкающее к вакууму. В декартовой системе координат параметры газа этого течения имеют вид

$$\begin{aligned} c_{00}(x, y, z) &= \omega \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}(x^2 + y^2 - r_*^2)}, \\ u_{00}(x, y, z) &= -\omega y, \quad v_{00}(x, y, z) = \omega x, \quad w_{00}(x, y, z) = w_{00}, \end{aligned}$$

а начальная свободная поверхность  $\Gamma$  будет цилиндрической поверхностью, в основании которой лежит окружность радиуса  $r_*$

$$x^2 + y^2 = r_*^2. \quad (6.1)$$

Здесь в расчетах траекторий движения частиц по формулам (5.2) и далее использовались следующие безразмерные константы<sup>13</sup>:

$$\omega = 0.1, 0.2, 0.01, \quad \Omega = 0.01, \quad \psi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \quad g = 0.09, \quad r_* = 1.$$

Начальные данные задавались в сорока точках начальной окружности (6.1). Для простоты восприятия на рис. 3 приведены восемь точек.

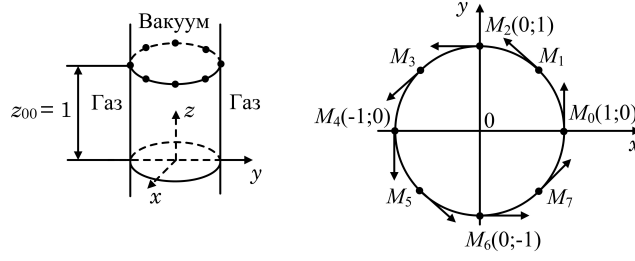


Рис. 3

Во всех рассчитанных вариантах полагалось  $z_{00} = 1$ , а значения  $w_{00}$  изменялись от 0.1 до 10.

Расчеты показали:

1. При начальных условиях  $w_{00}$ , принадлежащих отрезку  $[0.1; 10]$ , траектория частицы, выходящая из точки начальной окружности (см. рис. 3), является восходящей некоторое время  $\tau = \tau_{\text{кон}}$ . После чего траектория становится нисходящей. Причем чем больше  $w_{00}$ , тем больше  $\tau_{\text{кон}}$ . Для каждой частицы газа — свое время  $\tau_{\text{кон}}$  и своя высота подъема (см. таблицу, где  $w_{00} = 1$ ).

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z, \tau = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1
$z, \tau = 6$	5.37	5.35	5.34	5.35	5.37	5.39	5.40	5.39
$z, \tau = 10$	6.46	6.40	6.38	6.40	6.46	6.52	6.55	6.52
$z(\tau_{\text{кон}})$	6.51	6.44	6.40	6.43	6.50	6.58	6.61	6.58
$\tau_{\text{кон}}$	10.99	10.84	10.78	10.83	10.97	11.12	11.19	11.15

2. Во все моменты времени, пока частицы газа на свободной поверхности двигаются вверх, сохраняется закрутка течения против часовой стрелки.

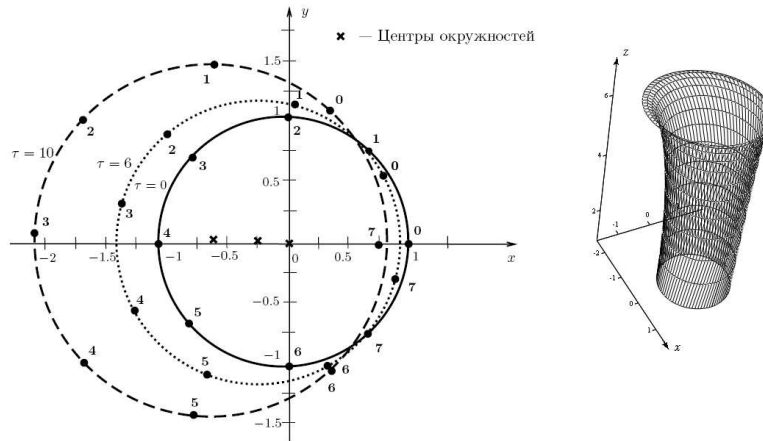


Рис. 4. ( $\omega = 0.1$ ,  $\psi = \frac{\pi}{6}$ ,  $w_{00} = 1$ )

3. С изменением времени проекция свободной поверхности в плоскость  $xOy$  остается окружностью. Радиус окружности увеличивается, а центр смещается на запад (существенно) и на север (незначительно) (рис. 4).



4. С увеличением  $\omega$  радиус окружностей увеличивается.

5. С увеличением  $\psi$  движение на северо-запад замедляется. Расчеты при других  $\psi$  и  $\omega$  это подтверждают.

В результате можно сделать вывод, что в течение некоторого времени частицы газа на свободной поверхности движутся по восходящим винтовым линиям. Эти линии существенно деформированы в западном и незначительно в северном направлениях.

В **параграфе 7** строится приближенное решение для закона движения свободной поверхности  $\Gamma_0$ .

Закон движения свободной поверхности  $\Gamma_0$  описывается системой (4.3).

В качестве начальных данных берутся следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r(0, z, \varphi) &= 1 + kz, & u(0, z, \varphi) &= 0, & v(0, z, \varphi) &= \omega r(0, z, \varphi), \\ w(0, z, \varphi) &= w_{00}, & k, w_{00} &= \text{const.} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь  $\Gamma: r = kz + 1$  — коническая поверхность, рассматриваемая при  $z \geq 0$ .

Приближенное решение задачи (4.3), (7.1) имеет вид:

$$\mathbf{f}_0(\varphi, z) + \mathbf{f}_1(\varphi, z)t + \mathbf{f}_2(\varphi, z)\frac{t^2}{2!} + \mathbf{f}_3(\varphi, z)\frac{t^3}{3!} + \mathbf{g}_4(\varphi, z)\frac{t^4}{4!}, \quad \mathbf{f} = \{r, u, v, w\}. \quad (7.2)$$

Для сравнения приведены рисунки, описывающие закон движения свободной поверхности  $\Gamma_0$  по точным и приближенным формулам для цилиндрической исходной поверхности  $\Gamma$  ( $r = 1$ ).

Расчет по формулам (5.2)  
(точное решение)

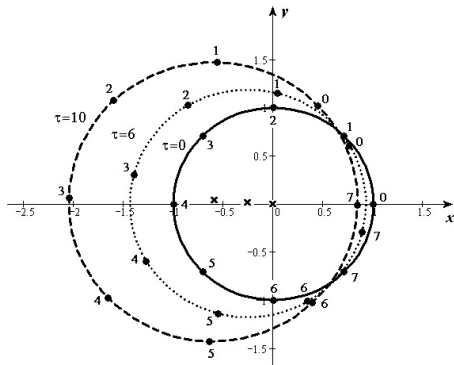


Рис. 5. ( $\tau = 0, 6, 10$ )

Расчет по формулам (7.2)  
(приближенное решение)

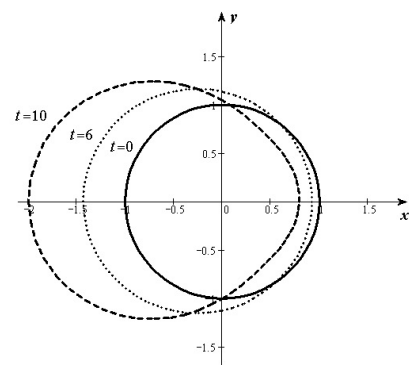


Рис. 6. ( $t = 0, 6, 10$ )

Рис. 5 получен по точным формулам (5.2) в параграфе 5, рис. 6 получен по приближенным формулам (7.2).

Расчеты проводились для случаев  $k = 0, 0.1, 1$  при следующих параметрах:  $\psi = \frac{\pi}{6}$ ,  $\omega = 0.1$ ,  $w_{00} = 0.1, 1$ .

В этом параграфе численные расчеты позволили представить движение свободной поверхности  $\Gamma_0$  в целом, а не по траекториям.

В **параграфе 8** численно определяются  $\tau_{кр}$  — моменты времени наступления градиентной катастрофы в коническом и цилиндрическом течени-

ях для различных показателей политропы газа  $\gamma$ . Для этого исследовались системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{v_0}{r_0}, & \frac{dz}{d\tau} &= w_0, & \frac{dr_0}{d\tau} &= u_0, \\ \frac{du_0}{d\tau} &= \frac{v_0^2}{r_0} + 2\Omega_3 v_0 - 2\Omega_2 \cos(\varphi) w_0, \\ \frac{dv_0}{d\tau} &= -\frac{u_0 v_0}{r_0} - 2\Omega_3 u_0 + 2\Omega_2 \sin(\varphi) w_0, \\ \frac{dw_0}{d\tau} &= 2\Omega_2 \cos(\varphi) u_0 - 2\Omega_2 \sin(\varphi) v_0 - g; \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{d\tau} &= -\frac{\gamma+1}{2} c_1 \left[ u_1 - \frac{r_{0\varphi}}{r_0} v_1 - r_{0z} w_1 \right] - \frac{\gamma-1}{2} c_1 \left[ \frac{1}{r_0} (u_0 + v_0 \varphi) + w_{0z} \right] - \\ &- c_1 \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2} v_0, \\ \frac{du_1}{d\tau} &= -\frac{u_0 \varphi}{r_0} v_1 - u_{0z} w_1 + \frac{u_0 \varphi v_0}{r_0^2} - u_1 \left[ u_1 + \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2} v_0 - \frac{r_{0\varphi}}{r_0} v_1 - r_{0z} w_1 \right] - \\ &- \frac{v_0^2}{r_0^2} + \frac{2v_0 v_1}{r_0} - \frac{2}{\gamma-1} c_1^2 + 2\Omega_3 v_1 - 2\Omega_2 w_1 \cos \varphi, \\ \frac{dv_1}{d\tau} &= -\frac{v_0 \varphi}{r_0} v_1 - v_{0z} w_1 + \frac{v_0 \varphi v_0}{r_0^2} - v_1 \left[ u_1 + \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2} v_0 - \frac{r_{0\varphi}}{r_0} v_1 - r_{0z} w_1 \right] + \\ &+ \frac{u_0 v_0}{r_0^2} - \frac{u_1 v_0}{r_0} - \frac{u_0 v_1}{r_0} + \frac{2}{\gamma-1} \frac{r_{0\varphi}}{r_0} c_1^2 - 2\Omega_3 u_1 + 2\Omega_2 w_1 \sin \varphi, \\ \frac{dw_1}{d\tau} &= -\frac{w_0 \varphi}{r_0} v_1 - w_{0z} w_1 + \frac{w_0 \varphi v_0}{r_0^2} - w_1 \left[ u_1 + \frac{r_{0\varphi}}{r_0^2} v_0 - \frac{r_{0\varphi}}{r_0} v_1 - r_{0z} w_1 \right] + \\ &+ \frac{2}{\gamma-1} r_{0z} c_1^2 + 2\Omega_2 u_1 \cos \varphi - 2\Omega_2 v_1 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где (8.1) — закон движения свободной поверхности  $\Gamma_0$ , а (8.2) — система транспортных уравнений.

С помощью системы (8.2) численно определялись  $\tau_{\text{кр}}$  — моменты времени наступления градиентной катастрофы для различных показателей политропы газа  $\gamma$ ; с помощью системы (8.1) — моменты времени  $\tau_{\text{кон}}$  окончания подъема частиц.

Для  $k = 0.1$ ,  $\omega = 0.1$ ,  $z_{00} = 1$ .

	$\varphi_0$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\gamma = \frac{7}{5}$	$\tau_{\text{кр}}$	11.0	10.8	10.8	8.9	6.8	5.9	8.9
$\gamma = \frac{4}{3}$	$\tau_{\text{кр}}$	11.0	10.8	10.8	9.2	6.9	6.0	9.0
$\gamma = \frac{5}{3}$	$\tau_{\text{кр}}$	11.0	10.8	10.2	7.8	6.3	5.7	8.6
$\gamma = \frac{11}{6}$	$\tau_{\text{кр}}$	11.0	10.8	9.2	7.3	6.0	5.6	8.5
$\gamma = 2$	$\tau_{\text{кр}}$	10.9	10.2	8.4	6.9	5.8	5.5	8.4
$\gamma = 2.5$	$\tau_{\text{кр}}$	9.6	7.6	6.5	5.8	5.3	5.3	8.1
$\gamma = 3$	$\tau_{\text{кр}}$	7.7	5.9	5.3	5.0	4.9	5.1	8.0
$\gamma = 7$	$\tau_{\text{кр}}$	2.9	2.1	2.0	2.2	3.0	4.5	7.4
	$\tau_{\text{кон}}$	11.0	10.8	10.8	10.8	11.0	11.2	11.1

Расчеты показали, что:

- 1) для цилиндрического случая величины  $\tau_{\text{кр}}$ ,  $\tau_{\text{кон}}$  не зависят от высоты начального слоя, с которого выпускается траектория;
- 2) с увеличением  $\gamma$  значения  $\tau_{\text{кр}}$  уменьшаются;

3) с увеличением  $\omega$  значения  $\tau_{кр}$  уменьшаются и стабилизируются (наступление градиентной катастрофы для разных начальных углов происходит в одно и то же время).

Полученные значения  $\tau_{кр}$  вносят дополнительные ограничения на размер области применимости приближенных решений параграфа 7.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В приложениях приведены не вошедшие в основной текст диссертации выкладки, результаты массовых расчетов конических течений в виде таблиц и рисунков.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построено одномерное течение нормального газа, примыкающего к вакууму в условиях самогравитации.

2. Построены трехмерные течения политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия массовых сил общего вида.

3. Построены трехмерные течения политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса.

4. Во всех исследуемых задачах установлен закон движения границы газ-вакуум либо с помощью конечных формул, либо с помощью решения соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

5. Численно построены законы движения свободной поверхности (границы газ-вакуум) для восходящих закрученных потоков политропного газа, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Найдены моменты времени возникновения бесконечных производных у параметров газа на свободной поверхности.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК*

1. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Одномерное истечение в вакуум нормального газа, гравитирующего по Ньютону // Вычислительные технологии. – Новосибирск. – 2009. – Т. 14, № 3. – С. 25-37.

2. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Труды института математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 63-74.

3. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Вычислительные технологии. – Новосибирск. – 2010. – Т. 15, № 5. – С. 51-71.

4. Баутин С.П., Баутин П.С., Белова Е.Д., Замыслов В.Е., Крутова И.Ю., Мезенцев А.В., Обухов А.Г. Математическое моделирование природных вос-

ходящих закрученных потоков типа торнадо // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Нижний Новгород. – 2011. – № 4(2). – С. 384-385.

*Статьи в других изданиях*

5. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Плоскосимметричные изэнтропические течения газа, примыкающие к вакууму с логарифмической особенностью в уравнении состояния // Проблемы прикладной математики и механики: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2007. – Вып. 58(141)/2м. – Т. 1. С. – 102-116.

6. Мезенцев А.В. Одномерное истечение нормального газа в вакуум в условиях самогравитации // Проблемы прикладной математики и механики: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2008. – Вып. 65(148)/3т. – С. 77-87.

7. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия массовой силы общего вида // Проблемы прикладной математики и механики: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2009. – Вып. 77(160)/4м. – С. 40-60.

8. Мезенцев А.В. Моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Молодые ученые – транспорту – 2009: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2009. – С. 315-348.

9. Мезенцев А.В. Трехмерное истечение в вакуум политропного газа в условиях действия массовых сил общего вида (задача о распаде специального разрыва) // Проблемы прикладной математики, механики: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2010. – Вып. 84(167). – С. 107-126.

10. Мезенцев А.В. Приближенные решения, описывающие конический и цилиндрический случаи движения свободной границы восходящего закрученного потока // Проблемы прикладной математики и механики: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2011. – Вып. 95(178)/6м. – С. 84-101.

11. Мезенцев А.В. Численное моделирование закона движения границы газ-вакуум и исследование системы транспортных уравнений для политропного газа в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Проблемы прикладной математики и механики: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2011. – Вып. 95(178)/6м. – С. 102-126.

12. Мезенцев А.В. Локальная теорема существования и единственности решения задачи о распаде специального разрыва для трехмерных течений газа // Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2012. – Вып. 4(187). – С. 65-81.

13. Мезенцев А.В. Нелокальная теорема существования и единственности решения задачи о распаде специального разрыва во всей области волны разреза // Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2012. – Вып. 4(187). – С. 82-105.

*Тезисы в трудах конференций*

14. Мезенцев А.В. Одномерный разлет нормального газа в вакуум в условиях самогравитации // Наука и технологии: тез. докл. XXVIII рос. школы. – Миасс: МСНТ, 2008. – С. 38-40.

15. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Одномерное истечение в вакуум нормального газа в условиях самогравитации // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам: тез. докл. XVII-й всерос. конф. – Новороссийск, ИПМ РАН, 2008. – С. 12.

16. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Успехи механики сплошных сред: тез. всерос. конф., приуроченной к 70-ти летию академика В.А. Левина. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – С. 32-33.

17. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Одномерное истечение в вакуум нормального газа, гравитирующего по Ньютону // Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение: тез. докл. всерос. конф., приуроченной к 90-летию академика Л.В. Овсянникова. – Новосибирск, 2009. – С. 60-61.

18. Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, под действием сил тяготения и Кориолиса // Снежинск и наука-2009. Современные технологии атомной отрасли: тез. докл. междунар. науч.-практ. конф. – Снежинск, 2009. – С. 70-71.

19. Мезенцев А.В. Математическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Математическое моделирование в естественных науках: тез. докл. XVIII всерос. школы-конф. молодых ученых и студентов. – Пермь: ГОУ ВПО Пермский государственный университет, 2009. – С. 58-59.

20. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Моделирование изэнтропических газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Забабахинские науч. чтения: сб. тез. докл. X междунар. конф. – Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2010. – С. 297-298.

*Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ*

№ 2013618922. Расчет траекторий одного спирального течения газа.

№ 2013618921. Определение закона движения свободной поверхности.

№ 2013618782. Численное построение решения системы транспортных уравнений.

МЕЗЕНЦЕВ АЛЕКСЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗА  
В ВАКУУМ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ МАССОВЫХ СИЛ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Подписано в печать 01.10.2013. Формат 60 × 84/16  
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,4  
Тираж 120 экз. Заказ 119

Издательство УрГУПС  
620034, г.Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66